УДК 517.988

А.С. Миненко, С.А. Гунько
Институт информатики и искусственного интеллекта
ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк, Украина
Украина, 83050, г. Донецк, пр. Б. Хмельницкого, 84, *minenko@iai.donetsk.ua*

Численный анализ конвективной модели кристаллизации

A.S. Minenko, S.A. Gun'ko
Institute of Informatics and Artificial Intelligence
of Donetsk National Technical University, Donetsk, Ukraine
Ukraine, 83050, c. Donetsk, B. Khmelnitskiy st., 84

Numerical Analysis of Crystallization Model with Convection

О.С. Міненко, С.А. Гунько
Інститут інформатики і штучного інтелекту
ДВНЗ «Донецький національний технічний університет», м. Донецьк, Україна
Україна, 83050, м. Донецьк, пр. Б. Хмельницького, 84

Чисельний аналіз конвективної моделі кристалізації

Исследуется пространственная задача Стефана с учетом примеси и конвективного движения в жидкой фазе, описываемого уравнениями Навье-Стокса. Предложен метод изучения этой задачи, состоящий в разложении решения в ряд по степеням малого параметра. В нестационарном случае решение соответствующих краевых задач для определения членов разложения строится как неподвижные точки операторов. Исследовано влияние конвекции на фронт кристаллизации. Разработан также метод решения задач сопряжения, возникающих при исследовании задач Стефана в пространстве.
Ключевые слова: дифференциальное уравнение, свободная граница, численные методы, функционал, оптимизация.

The three-dimensional convection Stefan problem in liquid phase is investigated. This problem is described by Navier-Stokes equations. The method for research of this problem, which consists of the solution expansion for series of a small parameter, is offered. In non- stationary case, the decision of corresponding boundary-value tasks for definition of the expansion members is formed as fixed points of operators. Convection influence on the front of crystallization is explored. The method for solution of the conjugation tasks, which take place when studying Stefan problem in space, is also developed.
Key words: differential equation, free boundary, numerical algorithms, functional, optimization

Досліджується просторова задача Стефана з урахуванням домішок і конвективного руху в рідинній фазі, які описуються рівнянням Нав'є-Стокса. Запропонован метод вивчення цієї задачі, який полягає в розкладі розв'язку у ряд, відповідно до ступенів малого параметру. У нестаціонарному випадку розв'язання відповідних крайових задач для визначення членів розкладання будуються як нерухомі точки операторів. Досліджено вплив конвекції на фронті кристалізації. Розроблено метод розв'язання задач спряження, що виникають при дослідженні задач Стефана в просторі.
Ключові слова: диференціальне рівняння, вільна межа, чисельні методи, функціонал, оптимізація

1. Статья посвящена численной реализации нелинейной конвективной задачи теплообмена, возникающей при кристаллизации вещества, в следующей постановке.

Пусть Ω_0 – заданная область в R^3, граница которой состоит из двух замкнутых связанных гладких поверхностей Γ_0^+ и Γ_0^-, не имеющих самопересечений. Пусть, далее

Γ_0 – гладкая замкнутая поверхность, лежащая внутри Ω_0, такая, что Γ_0^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0. Поверхность Γ_0 разбивает Ω_0 на две подобласти Ω_0^+ и Ω_0^-, которые в начальный момент *t = 0* заняты жидкой и твердой фазами соответственно. Будем обозначать через $\Omega_t^{\pm}$ область занятую жидкой (твердой) фазой в момент времени *t.* Заметим, что в процессе кристаллизации проходит изменение границы Γ_0^+ (это связано с тем, что жидкая и твердая фазы имеют разные плотности), а граница Γ_0^- остается неизменной. Задача состоит в определении областей Ω_t^+ и Ω_t^- (т.е. границ Γ_t^+ и Γ_t), занимаемых твердой и жидкой фазами соответственно в момент времени $t\in[0,T]$, вектора скорости $\vec{V}(x,t) = =(V_1(x,t),V_2(x,t),V_3(x,t))$, давления $p(x,t)$, концентрации примеси $c(x,t)$, распределений температур жидкой $u^+(x,t)$ и твердой $u^-(x,t)$ фаз по следующим условиям:

$$\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)u^+(x,t)-a_+^2\nabla^2u^+(x,t)=0,\ (x,t)\in D_T^+;\ \frac{\partial u^-(x,t)}{\partial t}-a_-^2\nabla^2u^-(x,t)=0,\ (x,t)\in D_T^-,$$

$$\frac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t)+\nabla p(x,t)=\nu\nabla^2\vec{V}(x,t)+\vec{f}(u^+,c),\ \nabla\vec{V}(x,t)=0,\ (x,t)\in D_T^+,$$

$$\vec{V}(x,0)=\vec{C}(x);\ T(\vec{V},p)\vec{n}=-q(x,t)\vec{n},\ (x,t)\in\Gamma_t^+;\ V_n=-(1-\frac{\rho^-}{\rho^+})W_n;\ V_\tau=0,\ (x,t)\in\Gamma_t,$$

$$u^{\pm}(x,t)=B^{\pm}(x,t),\ (x,t)\in\Gamma_t^{\ +}\cup\Gamma_0^{\ -};\ u^{\pm}(x,0)=A^{\pm}(x); \qquad (1)$$

$$u^+=u^-=T^*-\varepsilon c,\ k_-\frac{\partial u^-}{\partial n}-k_+\frac{\partial u^+}{\partial n}=\chi\rho^+W_n,\ (x,t)\in\Gamma_t,$$

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)c(x,t)-\gamma\nabla^2c(x,t),\ (x,t)\in D_T^{\ +};\ c(x,0)=g_0(x),$$

$$c(x,t)=g(x,t),\ (x,t)\in\Gamma_t^+;\ -\alpha\frac{\partial c}{\partial n}=\beta cW_n,\ (x,t)\in\Gamma_t.$$

здесь $D_T^{\pm}=\{(x,t):x\in\Omega_t^{\pm},\ t\in(0,T)\}$, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $\Omega_t^{\pm}$ – области соответственно жидкой и твердой фаз, $\partial\Omega^+=\Gamma_t\cup\Gamma_t^+$, $\partial\Omega^-=\Gamma^-{}_0\cup\Gamma_t$, $\vec{n}$ – нормаль к Γ_t, направленная в сторону Ω_t^+; T^*, ν, ε, χ, ρ^+, ρ^-, α, β, γ, κ_-, κ_+, – положительные постоянные, $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3})$, $T(\vec{V},p)$ – тензор напряжений с элементами $T_{ij}=-\delta_{ij}p+\nu(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i})$, W_n – скорость движения фронта кристаллизации в направлении нормали $\vec{n}$, V_n и V_τ – нормальная и тангенциальная составляющие $\vec{V}$.

Если $\Phi(x,t)=u^{\pm}(x,t)+\varepsilon c(x,t)-T^*=0$ – уравнение поверхности Γ_t, тогда $W_n=-\Phi_t/|\nabla\Phi|$, $\vec{n}=\frac{\nabla(u^{\pm}+\varepsilon c)}{|\nabla(u^{\pm}+\varepsilon c)|}$.

Укажем, что условие Стефана можно представить также в виде:

$$\kappa_-^2|\nabla u^-|^2-\kappa_+^2|\nabla u^+|^2+\varepsilon(\kappa_-^2+k_-k_+)(\nabla u^-,\nabla c)-\varepsilon(\kappa_-^2+k_-k_+)(\nabla u^+,\nabla c)+\chi\rho^+(\kappa_-u_t^-+\kappa_+u_t^+)+$$
$$+\chi\rho^+\varepsilon(\kappa_++\kappa_-)c_t=0,\quad (x,t)\in\Gamma_t.$$

Предполагается, что $A(x)\in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega}_0^{\ +})$, $C(x)\in H^{2+\alpha}(\Omega_0^{\ +})$, $B^{\pm}(x,t)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_t^+\cup\Gamma_0^-\times[0,T])$,

$\overrightarrow{f}(u^+,c)\in C^1(R^2)$, $g(x,t)\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_t^{\ +}\times[0,T])$, $g_0(x)\in H^{4+\alpha}(\overrightarrow{\Omega}_0^+)$. При этом $g(x,t)$ и $g_{x_i}(x,t)$ должны быть функциями класса $H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(R^3\times[0,T])$. Предполагается также выполненными условия согласования до первого порядка включительно, которые следуют из предположения существования гладкого решения и формулируются аналогично [1 с. 363, с. 268].

Отметим, что при малых значениях *t*, задача (1) разрешима в классе гладких функций $u^\pm\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{D_T^\pm})$, $\vec{V}\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{D_T^\pm})$, $C\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{D_T^\pm})$, $\nabla p\in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{D_T^\pm})$, а границы Γ_t^+ и Γ_t описываются функциями, принадлежащими классам $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$ [2].

Решение задачи (1) моделирует процесс кристаллизации вещества с учетом переноса примеси в жидкой фазе. При этом последнее условие в (1) следует из закона Нернста, а $\overrightarrow{f}(u^+,c)$ описывает влияние неравномерного распределения температуры и концентрации примеси на движение жидкости.

2. Известно, что свободные границы Γ_t и Γ_t^+ можно представить в виде $\Gamma_t=\{x=x(\omega)+\vec{n}(\omega)\rho(\omega,t)\}$, $\Gamma_t^{\ +}=\{x=x(\omega^*)+\eta(\omega^*,t)\vec{n}(\omega^*)\}$, где $\omega=(\omega_1,\omega_2)$, $\omega^*=(\omega_1^*,\omega_2^*)$, $x(\omega)\in\Gamma_0$, $x(\omega^*)\in\Gamma_0^+$, $\rho(\omega,t)$ и $\eta(\omega^*,t)$ некоторые функции соответственно классов $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0\times[0,T])$ и $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0^+\times[0,T])$, $\rho(\omega,0)=0$ и $\eta(\omega^*,0)=0$ [2].

Предложен метод решения задачи (1), состоящий в разложении решения в ряд по степеням малых чисел ε :

$$u^\pm(x,t;\varepsilon)=u_0^\pm(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k u_k^\pm(x,t),\ p(x,t;\varepsilon)=p_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k p_k(x,t),$$

$$V_i(x,t;\varepsilon)=V_{i0}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k V_{ik}(x,t),\ i=1,2,3;\ \rho(\omega,t;\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\rho_k(\omega,t),\qquad(2)$$

$$c(x,t)=c_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k c_k(x,t).$$

Для нулевого приближения $u_0^\pm(x),\overrightarrow{V_0}(x)=(V_{10}(x),V_{20}(x),V_{30}(x))$, Γ_0 и $c_0(x)$ из условий (1) и разложения (2) вытекает следующая задача:

$$(\overrightarrow{V_0}\nabla)\overrightarrow{V_0}(x)+\nabla p_0(x)=\nu\nabla^2\overrightarrow{V_0}(x)+\overrightarrow{f}(u_0,c_0),\ \ x\in\Omega_0^{\ +},$$

$$\nabla\overrightarrow{V_0}(x)=0,\ x\in\Omega_0^{\ +},\ T(\overrightarrow{V_0},p_0)\vec{n}=-q(x)\vec{n},\ \ x\in\Gamma_0^{\ +},\ V_n=-(1-\frac{\rho^-}{\rho^+})W_n,\ \ V_\tau=0,$$

$$x\in\Gamma_0;\ (\overrightarrow{V_0}\nabla)u_0^+-a_+^2\nabla u_0^+=0,\ x\in\Omega_0^+,\ u_0^\pm(x)=B^\pm(x),\ x\in\Gamma_0^+\cup\Gamma_0^-,\ u_0^-(x)=u_0^+(x)=T^*,\qquad(3)$$

$$x\in\Gamma_0;\ k_-\frac{\partial u_0^-}{\partial n}-k_+\frac{\partial u_0^+}{\partial n}=0,\ x\in\Gamma_0,\ \ \nabla^2u_0^-=0,\ \ x\in\Omega_0^{\ -},\ \ (\overrightarrow{V_0}\nabla)c_0-\gamma\nabla^2c_0=0,$$

$$x\in\Omega_0^+,\ c_0(x)=g_0(x),\ \ x\in\Gamma_0^+;\ -\alpha\frac{\partial c_0}{\partial n}=0,\ \ x\in\Gamma_0.$$

Здесь ради простоты предполагается, что функции $B^{\pm}$ и q зависят только от переменной *x*.

Лемма 1. Пусть функции $u_0^{\pm}(x) = A^{\pm}(x)$, $\vec{V_0}(x) = \vec{C}(x)$, $c_0(x) = g_0(x)$ являются решением задачи (3) соответственно в области $\Omega_0^{\pm}$ и Ω_0^{+}. Тогда эти функции можно взять в качестве нулевого приближения задачи (1).

3. Далее, пусть $Q_T^{\pm} = \Omega_0^{\pm} \times [0,T]$, $\Gamma_{0T}^{-} = \Gamma_0^{-} \times [0,T]$, $\Gamma_{0T}^{+} = \Gamma_0^{+} \times [0,T]$, $\Gamma_{0T} = \Gamma_0 \times [0,T]$.

Рассмотрим первое приближение $(\vec{V_1}, u_1^{\pm}, p_1, \rho_1, c_1)$ задачи (1) для малых чисел ε. Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{V_1}}{\partial t} + (\vec{V_1}\nabla)\vec{V_0} + (\vec{V_0}\nabla)\vec{V_1} + \nabla p_1 = \nu \nabla^2 \vec{V_1} + f_u{}'(u_0^+, c_0)u_1^+ + \overrightarrow{f_C}{}'(u_0^+, c_0)c_1,\, (x,t)Q_T^+; \\ \nabla \vec{V_1} = 0,\, (x,t) \in Q_T{}^+; \\ T(\vec{V_0} + \vec{V_1}, p_1)\vec{n} = 0,\, x \in \Gamma_0{}^+, \vec{V_1}(x,0) = 0, \\ V_{1n} = (1 - \dfrac{\rho^-}{\rho^+})\dfrac{u_{1t}^+}{|\nabla u_0^+|}, V_{1\tau} = 0,\, x \in \Gamma_0; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1^+}{\partial t} + (\vec{V_1}\nabla)u_0^+ + (\vec{V_0}\nabla)u_1^+ - a_+^2\nabla^2 u_1^+ = 0, (x,t) \in Q_T^+; \dfrac{\partial u_1^-}{\partial t} + a_-^2 \nabla^2 u_1^- = 0, (x,t) \in Q_T^-, \\ u^{\pm}(x,0) = 0;\, u_1^{\pm}(x,t) = 0,\, (x,t) \in \Gamma_{0T}^- \cup \Gamma_{0T}^+, \\ u_1^{\pm} = u_1^-, \quad k_- \dfrac{\partial u_1^-}{\partial n} - k_+ \dfrac{\partial u^+{}_1}{\partial n} + f_1(x,t) = \chi \rho^+ \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t}, \quad (x,t) \in \Gamma_{0T}; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_1}{\partial t} + (\vec{V_1}\nabla)c_0 + (\vec{V_0}\nabla)c_1 - \gamma \nabla^2 c_1 = 0,\, (x,t) \in Q_T{}^+, \\ c_1(x,0) = 0,\, c_1(x,t) = 0,\, (x,t) \in \Gamma_{0T}^+, \\ -\alpha \dfrac{\partial c_1}{\partial n} = f_2(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_{0T}, \quad f_2(x,t) = c_0 \dfrac{u_t^+}{|\nabla u_0^+|}, \\ \dfrac{\partial c_0(x)}{\partial n}\eta_1(\omega,t) + c_1\ (x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_{0T}^+. \end{cases} \tag{6}$$

Зададим теперь $\vec{V} = \vec{V}_1(x,t)$. Затем решим задачу (5), (6) и найдем $u^{\pm}, c, \rho$. После чего заменим $u^{\pm}, c, \rho$ – решением задачи (5), (6) и решим задачу (4), являющуюся начально-краевой задачей для системы Навье-Стокса. Затем, используя новое значение $V(x,t)$, снова решаем задачу (5) и (6) и т.д. Таким образом, получим процесс последовательных приближений. Доказательство сходимости этого процесса аналогично приведенному в работе [3]. При этом при заданном $\rho_1(\omega,t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$ найдем функции $u_1^{\pm}(x,t;\rho) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q_T^{\pm}})$, $c_1(x,t;\rho) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q_T^{\pm}})$, как единственное решение задачи (5), (6) [1], причем $\rho_1(\omega,t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_1: $M_1\rho_1 = \dfrac{1}{\chi\rho^+}\int_0^t (k_- \dfrac{\partial u_1^-}{\partial n} - k_+ \dfrac{\partial u_1^+}{\partial n} + f_1(x,t))dt$, $x(\omega) \in \Gamma_{0T}$. Имеют место следующие утверждения.

Лемма 2. Пусть выполнено условие $|\nabla A^{+}(x)|=\dfrac{\partial g_0(x)}{\partial n}$ на Γ_0. Тогда оператор M_1, действующий из $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$ в $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$, имеет там неподвижную точку.

Лемма 3. В качестве первого приближения задачи (1) можно взять решение задачи (4) – (6): $u_1^{\pm}(x,t), c_1\ (x,t), \vec{V_1}\ (x,t), p_1\ (x,t), \rho_1\ (x,t)$.

Теорема. Пусть $\dfrac{\partial g_0(x)}{\partial n}\neq 0$ на $\Gamma_0{}^{+}$. Тогда при малых числах ε и достаточно малых значениях *t* справедливы формулы:

$$\Gamma_t : x = x(\omega) - \varepsilon \vec{n}\frac{u_1^{\pm}(x(\omega),t)}{|\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))|} + o(\varepsilon),\ (x,t)\in\Gamma_{0T},$$

$$\Gamma_t^{+} : x = x(\omega^{*}) - \varepsilon \vec{n}\frac{c_1(x(\omega),t)+g_0(x(\omega))-g(x(\omega),t)}{\dfrac{\partial g_0(x(\omega))}{\partial n}} + o(\varepsilon),\ (x,t)\in\Gamma_{0T}^{+},$$

где $u_1^{\pm}(x,t),\ c_1\ (x,t),\ \rho_1\ (\omega,t)$, $\eta_1\ (\omega,t)$ – функции класса $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$, являющиеся решением задачи (4) – (6).

4. Рассмотрим случай, когда $\Omega=\left\{(x_1,x_2,x_3): r<x_1^2+x_2^2+x_3^2<R\right\}$ и без учета концентрации примеси в задаче (1). Далее, так как решение задачи (1) ищем в виде (2), тогда нулевое приближение находим как решение следующей задачи:

$$\begin{aligned}&\nabla^2 u^{\pm}(x)=0,\ x\in\Omega_0^{\pm},\ A^{\pm}(x)\big|_{\Gamma^{\pm}}=B^{\pm}(x),\ u^{\pm}(x)\big|_{\Gamma_0}=0,\\ &\vec{C}(x)=0,\ x\in\overline{\Omega_0^{\pm}};\ \left|\nabla u^{-}(x)\right|-\left|\nabla u^{+}(x)\right|=0,\ x\in\Gamma_0\end{aligned} \qquad (7)$$

Заметим, что замена $\tilde{u}^{-}=ku^{-}$, при $x\in\Omega^{-}$ и $\tilde{u}^{+}=u^{+}$, если $x\in\Omega^{+}$, сводит задачу (7) к случаю $k=1$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что это условие выполнено. Нулевое приближение $u_0^{\pm}(x)$, Γ_0 найдем из условия минимума функционала $I\left(u_0^{\pm},\Gamma_0\right)=\iiint\limits_{\Omega}\left|\nabla u\right|^2 dx_1dx_2dx_3$, здесь $\Omega=\Omega_0^{+}\bigcup\Omega_0^{-}$ и $u=u^{-}$ при $x\in\Omega^{-}$ и $u=u^{+}$, если $x\in\Omega^{+}$.

Далее, рассматривая функционал I в сферических координатах, получим

$$I\left(u_0^{\pm}\right)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_r^{R}\left(u_\rho^2+\frac{1}{\rho^2}u_\Theta^2+\frac{1}{\rho^2\sin^2\Theta}u_\varphi^2\right)\rho^2\sin\Theta d\varphi d\Theta d\rho .$$

Минимум функционала ищем в следующем виде

$$u=B^{+}+\frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2}\left(B^{-}-B^{+}\right)+\left(R^2-\rho^2\right)\left(\rho^2-r^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}C_k\rho^k .$$

Неизвестные коэффициенты C_k определяются методом Ритца. В частности в случае нулевого приближения

$$u_0=B^{+}+\frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2}\left(B^{-}-B^{+}\right)+\left(R^2-\rho^2\right)\left(\rho^2-r^2\right)C_0$$

из уравнения $\partial I\left(u_0^{\pm}\right)/\partial C_0=0$ определим коэффициент C_0. Свободную поверхность $\mathit{\Gamma}_0:\rho=\rho_0\left(\varphi,\Theta\right)$ найдем из условия $u_0\left(\varphi,\Theta,\rho_0\left(\varphi,\Theta\right)\right)=0$. Тогда для свободной поверхности $\mathit{\Gamma}_t$ получим уравнение

$$\mathit{\Gamma}_t:\rho\left(\varphi,\Theta,t\right)=\rho_0\left(\varphi,\Theta\right)-\mathrm{Re}\frac{u_1^{\pm}\left(\varphi,\Theta,t\right)}{\left|\nabla A^{\pm}\left(\varphi,\Theta\right)\right|}+o\left(\mathrm{Re}\right).$$

На рисунке представлена поверхность $\mathit{\Gamma}_t$ при следующих значениях параметров:

$$t=200,\quad R=6,\quad r=0{,}8,\quad -\frac{\pi}{2}\le\Theta\le\frac{\pi}{3},\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},$$

$$B^{+}=3\left[\cos^2\Theta+\cos^2\varphi\right],\quad B^{-}=-0{,}35\left[\cos^2\Theta+\cos^2\varphi\right]-0{,}1$$

Предложенный алгоритм построения поверхности $\mathit{\Gamma}_t$ позволяет исследовать эту поверхность в зависимости от основных параметров задачи (1), в том числе и числа Re. На рис. 1 свободная поверхность $\mathit{\Gamma}_t$ расположена между сферами радиусов R и r.

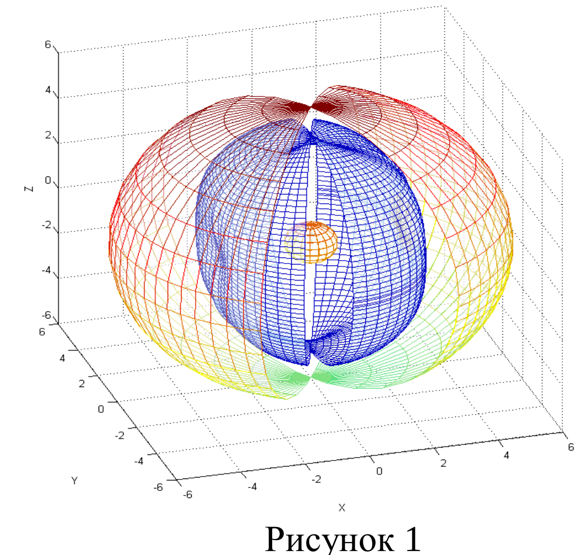


Рисунок 1

Литература

1. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева – М. : Наука, 1967. – 756 с.
2. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей / Миненко А.С. – К. : Наукова думка, 2005. – 341 с.
3. Солонников В.А. Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью / В.А. Солонников // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1977. – 41, № 6. – С. 1388-1424.

Literatura

1. Ladyzhenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural’ceva N.N.. Linejnye i kvazilinejnye uravnenija parabolicheskogo tipa. M.: Nauka. 1967. 756 s.
2. Minenko A.S.. Variacionnye zadachi so svobodnoj granicej. K.: Naukova dumka. 2005. 341 s.
3. Solonnikov V.A.. Izv. AN SSSR. Ser. matem. 1977. 41, № 6. S. 1388-142.

A.S. Minenko, S.A. Gynko

Numerical Analysis Model of Crystallization with Convection

Still, only one paper has been known as that one, which contains the proof of the existence of the classical solution to the two-phase multi-dimensional Stefan problem:

$$\frac{\partial u^{+}(x,t)}{\partial t} + (\overrightarrow{V\nabla})u^{+}(x,t) - a_{+}^{2}\nabla^{2}u^{+}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in D_{T}^{+},$$

$$\frac{\partial u^{-}(x,t)}{\partial t} - a_{-}^{2}\nabla^{2}u^{-}(x,t) = 0 \quad (x,t) \in D_{T}^{-},$$

$$\frac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t) + \nabla p(x,t) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^{2}\vec{V}(x,t) + \vec{f}(u^{+}),$$

$$u^{\pm}(x,t)\Big|_{x\in\Gamma_t} = 0, \sum_{i=1}^{3}\left[k_{-}\frac{\partial u^{-}}{\partial x_i} - k_{+}\frac{\partial u^{+}}{\partial x_i}\right]\cos(n,x_i) + k\cos(n,t) = 0,$$

$$D_{T}^{\pm} = \left\{(x,t) : x \in \Omega_{t}^{\pm}, t \in (0,t)\right\}, \ x = (x_1, x_2, x_3), \ \Omega_{t}^{\pm}.$$

The given article is the second one, which contains the result of no less significance. The authors considers the non-degenerate two-phase Stefan problem in a cylinder, assuming that there exists a solution of the corresponding stationary Stefan problem $u_{0}^{\pm}(x)$ and that the boundary and the initial data of the problem are only slightly different from the corresponding characteristics of the stationary solution:

$$u^{\pm}(x,t;\mathrm{Re}) = u_{0}^{\pm}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{Re})^{k}u_{k}^{\pm}(x,t),$$

$$V_i(x,t;\mathrm{Re}) = V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{Re})^{k}V_{ik}(x,t), \quad i = 1,2,3;$$

$$\rho(\omega,t;\mathrm{Re}) = \sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{Re})^{k}\rho_{k}(\varpi,t).$$

The existence of the smooth solution of the problem is proved under not too restrictive assumptions concerning the input data of the problem. Moreover, the authors indicate a simple condition, which guarantees the existence of the corresponding stationary solution and its stability, the latter being understood in its usual sense. This paper may be strongly recommended to all interested in parabolic free boundary problems in general and in their classical treatment in particular.

Статья поступила в редакцию 19.12.2011.